

# Planetario di Caserta

Piazza G. Ungaretti, 1 – 81100 Caserta – tel. 0823/344580 - [www.planetariodicaserta.it](http://www.planetariodicaserta.it), [info@planetariodicaserta.it](mailto:info@planetariodicaserta.it)

---

## *Attività didattica*

### **Determinazione della massa di Giove tramite le osservazioni dei satelliti galileiani**

#### **Obiettivi educativi**

Si tratta di un'attività modulare, interdisciplinare (fisica, astronomia, storia e filosofia della scienza, uso delle nuove tecnologie...), particolarmente adeguata per ottenere il pieno coinvolgimento degli studenti, adatta a costruire una *forma mentis* scientifica, rivolta ad allievi che abbiano studiato i primi rudimenti di dinamica.

#### **Struttura e contenuti:**

- a) introduzione storica-filosofica alla nascita della moderna astronomia (modello geocentrico e modello eliocentrico, le osservazioni di Tycho Brahe, le leggi di Keplero, le osservazioni di Galileo, il processo a Galileo etc.);
- b) lezione al planetario sulla scoperta dei satelliti galileiani e le leggi di Keplero;
- c) ricerca in rete delle proprietà fisiche di Giove e delle sue lune;
- d) derivazione della terza legge di Keplero e sua applicazione alle lune di Giove;
- e) pianificazione delle osservazioni di Giove (ricerca del periodo in cui Giove è visibile durante tutta la notte). A tale scopo è utile consultare le effemeridi, ovvero le tabelle con i periodi di visibilità dei fenomeni astronomici, disponibili su molti siti internet di osservatori astronomici, come ad esempio quello dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte (o, perché no, quello di Greenwich!);
- f) uso del planetario digitale *Celestia* per introdurre l'argomento ed effettuare le osservazioni necessarie al progetto (*Celestia* è scaricabile gratuitamente dalla rete; gli *script* specifici contenenti i comandi utili per la realizzazione dell'osservazione virtuale di Giove possono essere richiesti al Planetario di Caserta, [info@planetariodicaserta.it](mailto:info@planetariodicaserta.it));
- g) elaborazione delle immagini acquisite (misura delle elongazioni dei satelliti galileiani, cioè delle distanze di Giove da ciascun suo satellite, conversione delle elongazioni in secondi d'arco tramite la determinazione della scala immagine);
- h) costruzione del grafico delle elongazioni in funzione del tempo di osservazione per la determinazione dei periodi orbitali e delle elongazioni massime dei singoli satelliti; nota la distanza di Giove dalla Terra al momento delle osservazioni, i raggi delle orbite sono ricavabili dalle elongazioni massime;
- i) calcolo della stima della massa di Giove utilizzando la terza legge di Keplero, i raggi delle orbite e i periodi dei satelliti.
- j)

#### **Durata:**

E' stimata in **18 ore**. Avendo a disposizione meno tempo, in **12 ore** si realizzano i moduli *b)*, *d)*, *g)*, *h)* ed *i)* (in tal caso le immagini delle osservazioni vanno richieste al Planetario di Caserta, [info@planetariodicaserta.it](mailto:info@planetariodicaserta.it)). In una forma minima, della durata di **8 ore** circa, è possibile realizzare i soli moduli *b)*, *d)*, *h)* ed *i)* utilizzando la tabella di misure di elongazioni di Callisto del maggio 2006, fornite a richiesta dal Planetario.

#### **Materiali necessari:**

- computer e proiettore (o Lavagna Interattiva Multimediale);
- stampante;
- matita a punta sottile, righello, carta millimetrata, calcolatrice per ciascun studente;
- accesso alla rete telematica Internet per ciascun studente o gruppo di studenti

# Planetario di Caserta

Piazza G. Ungaretti, 1 – 81100 Caserta – tel. 0823/344580 - [www.planetariodicaserta.it](http://www.planetariodicaserta.it), [info@planetariodicaserta.it](mailto:info@planetariodicaserta.it)

## La fisica richiesta:

*Prima legge di Keplero:* i pianeti descrivono delle ellissi piane di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.

*Seconda legge di Keplero:* il raggio vettore di un pianeta (cioè la congiungente pianeta-Sole), descrive aree uguali in tempi uguali.

*Terza legge di Keplero:* il cubo del semiasse maggiore dell'orbita di un pianeta è proporzionale al quadrato del suo periodo di rivoluzione.

Le leggi di Keplero hanno una valenza generale, cioè valgono cioè ogni volta che due masse, legate gravitazionalmente, orbitano intorno al centro di massa comune.

Per il calcolo della massa di Giove si utilizzerà la terza legge: se  $m$  è la massa di uno dei due corpi che orbita, con periodo  $T$  e semiasse maggiore  $r$ , intorno al centro di massa del sistema insieme al corpo di massa  $M$ , essa stabilisce che

$$r^3 = \frac{G}{4\pi^2} (m + M) \cdot T^2$$

che, nel caso di  $M \gg m$ , diventa

$$r^3 = \frac{GM}{4\pi^2} T^2$$

È possibile ricavare facilmente questa ultima relazione supponendo che le orbite siano circolari (la fisica è la stessa del caso generale ma si semplifica enormemente la parte matematica); in tal caso la seconda legge di Keplero ci assicura che il moto avviene a velocità angolare costante.

Sotto queste ipotesi, siano:

- $r$ , il raggio dell'orbita del corpo
- $m$ , la sua massa
- $M$  la massa dell'altro corpo (l'ipotesi che  $M$  sia molto maggiore di  $m$  implica che il centro di massa del sistema coincida con  $M$ )
- $F$ , la forza gravitazionale
- $a_c$ , l'accelerazione centripeta;

allora, si ha che

$$F = G \frac{mM}{r^2} \quad \text{e} \quad a_c = \omega^2 r = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare e  $T$  è il periodo.

Poiché dal primo principio della dinamica sappiamo che  $F = m a$ , allora

$$G \frac{mM}{r^2} = m \frac{4\pi^2}{T^2} r \Rightarrow r^3 = \frac{G}{4\pi^2} MT^2$$

$$M_G = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2}$$

con  $G=6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , costante di Gravitazione Universale.

Quindi a partire dal raggio dell'orbita,  $R$ , e dal periodo,  $T$ , di un suo satellite si può stimare la massa di Giove usando la precedente relazione;  $R$  e  $T$  devono essere espressi, rispettivamente, in metri e in secondi.

# Planetario di Caserta

Piazza G. Ungaretti, 1 – 81100 Caserta – tel. 0823/344580 - [www.planetariodicaserta.it](http://www.planetariodicaserta.it), [info@planetariodicaserta.it](mailto:info@planetariodicaserta.it)

## I dati

Nel maggio 2006, sono state effettuate le seguenti misure di elongazione di Callisto da Giove. (OVEST positive, EST negative, in secondi d'arco; l'ora di osservazione è espressa in frazioni di ora e riferita ad UT; per esempio: 03,48 vuol dire 3<sup>h</sup>28<sup>m</sup>48<sup>s</sup> !)

Data	Ora (in ore)	Data ed ora (in giorni e sue frazioni, a partire dalle ore 0,00 del 1/5)	Elongazione (in ")
1/5	20,50	0,854	477,6
2/5	04,00	1,167	514,3
2/5	20,00		574,0
3/5	03,48		583,2
3/5	21,48		583,2
4/5	03,48		574,0
4/5	23,00		500,5
5/5	21,48		358,2
6/5	02,00		321,4
6/5	21,48		156,1
7/5	03,48		105,6
7/5	23,00		-91,8
8/5	21,48		-284,7
9/5	03,48		-335,2
9/5	23,00		-468,4
10/5	21,48		-564,8
11/5	21,48		-597,0
12/5	03,48		-587,8
12/5	23,00		-523,5
13/5	21,48		-413,3
14/5	23,00		-197,5
15/5	21,48		96,4
16/5	21,48		293,9
17/5	20,50		477,6
18/5	21,48		574,0
19/5	21,48		583,2
20/5	03,48		574,0
20/5	23,00		500,5

## Obiettivo sperimentale:

Sapendo che la distanza media Terra-Giove, nel periodo delle osservazioni, era di  $4.42 \pm 0.01$  UA, (1 UA =  $1,49 \times 10^{11}$  m), stimare la massa di Giove.

## Attività I: conversione della data ed ora in giorni e frazione di giorno a partire dalle ore 0,00 del giorno della prima osservazione.

Dovendo determinare il periodo di rotazione di Callisto intorno a Giove, occorre trasformare i tempi di osservazione (interpolare, effettuare differenze, determinare intervalli temporali etc.). Il formato che

# Planetario di Caserta

Piazza G. Ungaretti, 1 – 81100 Caserta – tel. 0823/344580 - [www.planetariodicaserta.it](http://www.planetariodicaserta.it), [info@planetariodicaserta.it](mailto:info@planetariodicaserta.it)

normalmente utilizziamo per i tempi nelle attività quotidiane (giorno, mese, anno, ora, minuti e secondi) è estremamente complicato per i calcoli astronomici.

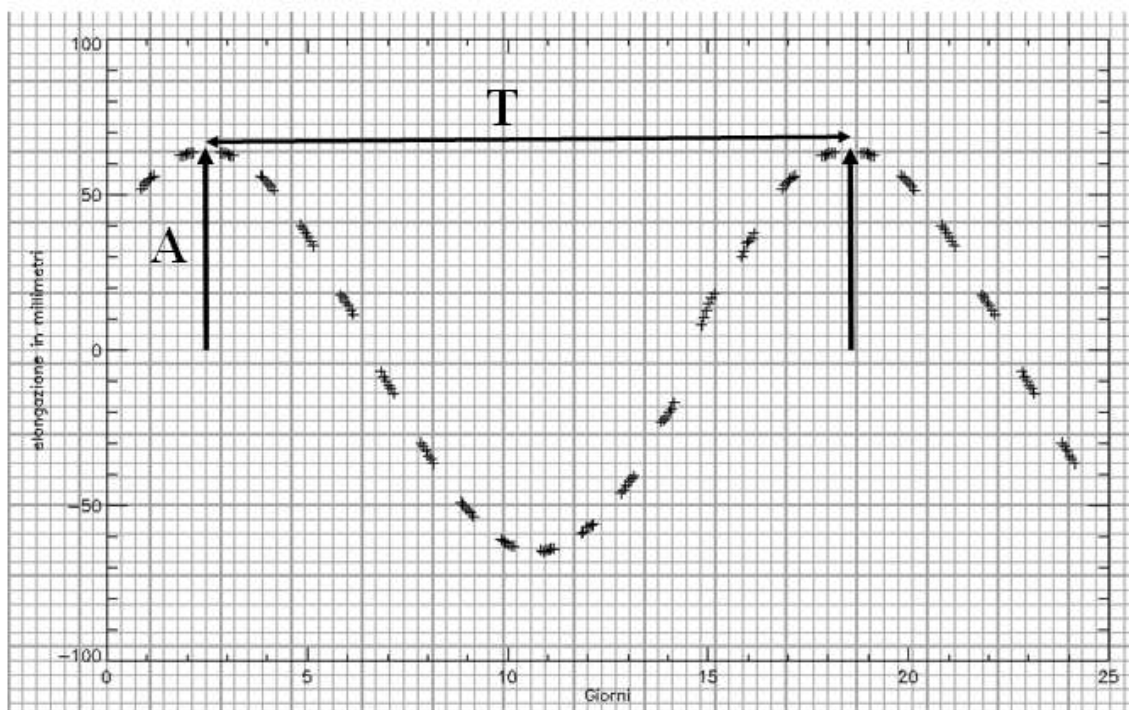
Per questo, in astronomia si usa correntemente il **giorno giuliano** (Julian Day, JD), che è il numero di giorni e frazione di giorno passati dal mezzogiorno del lunedì 1 gennaio 4713 a.C..

Il sistema dei giorni giuliani è stato progettato per fornire agli astronomi un sistema univoco di date utile per lavorare con calendari e cronologie storiche differenti, giacché esso non presenta la difficoltà di anni bisestili, cambi di calendario, eccetera. Ha il grande vantaggio che con esso si possono calcolare facilmente relazioni tra date lontane (per esempio nello studio di antichi scritti, fenomeni a grande periodicità etc.).

Nel nostro caso è sufficiente fissare come origine della scala dei tempi (giorno 0) le ore 0,00 del primo giorno di osservazione; i giorni saranno la differenza tra i vari giorni di osservazione ed il primo giorno di osservazione, la frazione di giorno si ottiene dividendo il tempo dell'osservazione, espresso in ore, per 24. Si calcola:  $JD_i = (g_i - g_0) + h_i/24$ .

## Attività II: tracciare il grafico, su un foglio di carta millimetrata, delle elongazioni di Callisto in funzione del tempo di osservazione per determinare periodo ed elongazione massima

La relazione tra elongazione e tempo di osservazione è una senoide: infatti, è la proiezione di un moto circolare su un diametro. Di tale senoide occorre determinare il periodo,  $T$ , e l'ampiezza,  $\alpha$ , che è collegata al raggio dell'orbita. Il modo più semplice per farlo è costruire un grafico, come in figura.



La rappresentazione grafica su carta millimetrata è un grande ausilio in molti problemi pratici ma ha le sue regole:

- utilizzare l'asse delle ascisse per la variabile indipendente (nel nostro caso, il tempo);
- riportare le coppie di coordinante (*i punti*) con un simbolo diverso dal "puntino" (per questioni di più facile leggibilità del grafico);
- scegliere in modo opportuno le scale per gli assi. È la regola più importante e difficile perché richiede esperienza. Se necessario, la scala per le ascisse può essere diversa dalla scala per le

# Planetario di Caserta

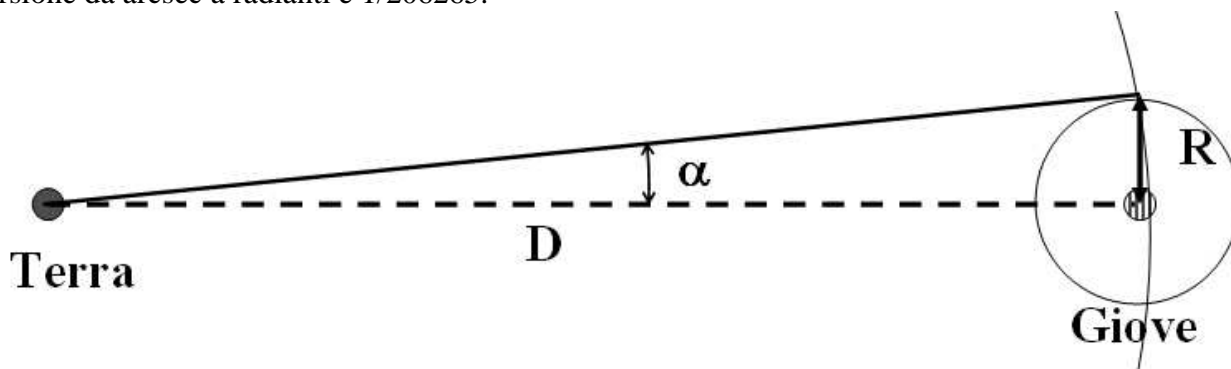
Piazza G. Ungaretti, 1 – 81100 Caserta – tel. 0823/344580 - www.planetariodicaserta.it, info@planetariodicaserta.it

ordinate se le grandezze che rappresentiamo sui due assi non sono omogenee. Infatti, la scala, su ognuno degli assi, è un compromesso tra la necessità di riempire il foglio con il disegno del grafico il più estesamente possibile (al fine di evitare di tracciare il grafico in una porzione minima o ridotta del foglio millimetrato) e la facilità di lettura dei valori dei punti senza necessità di usare la calcolatrice. *Suggerimento:* Per avere una prima idea della scala, individuare dalla tabella i valori massimo e minimo da rappresentare, calcolare il rapporto tra la differenza massimo-minimo e la lunghezza dell'asse (per esempio in mm). Il minimo valore "ragionevole" più grande della prima approssimazione di scala individuata potrebbe essere la scala giusta.

$T = \dots\dots\dots$  giorni =  $\dots\dots\dots$  secondi       $\alpha = \dots\dots\dots$  arcsec.

### Attività III: dalla elongazione massima (e distanza Terra-Giove al momento delle osservazioni) ricavare il raggio dell'orbita di Callisto (in m).

L'elongazione massima è l'angolo sotteso dal raggio dell'orbita di Callisto come visto dalla Terra (vedere figura). Visto che l'angolo  $\alpha$  è piccolissimo, possiamo approssimare la corda  $R$  con l'arco di cerchio di raggio  $D$  (distanza Terra-Giove), per cui:  $R = \alpha D$ , con  $\alpha$  espresso in radianti. Il fattore di conversione da arcsec a radianti è  $1/206265$ .



$R = \dots\dots\dots$  m.

### Attività IV: stima della massa di Giove.

$$M_G = \frac{4 \pi^2 R^3}{GT^2} = \dots, \dots \times 10 \dots \text{ kg}$$

Confronta il valore ottenuto con quello che si trova sui testi ( $M_{\text{letteratura}} = 1,8986 \times 10^{27} \text{ Kg}$ ):

errore assoluto =  $\dots\dots\dots$  kg

errore relativo =  $\dots\dots\dots$  ; errore percentuale =  $\dots\dots\dots$  % .

Queste differenze a cosa possono essere dovute?  $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$   
 $\dots\dots\dots$