Planetario di Caserta

Piazza G. Ungaretti, 1 – 81100 Caserta – tel. 0823/344580 - www.planetariodicaserta.it, info@planetariodicaserta.it

Attività didattica
Misura del raggio terrestre con il metodo di Eratostene

Obiettivi educativi:
E' un'attività interdisciplinare (trigonometria, astronomia, uso delle nuove tecnologie...) basata sul metodo ideato più di 2000 anni fa da Eratostene per misurare il raggio terrestre. Coinvolge gruppi di studenti in due diverse città poste all'incirca sullo stesso meridiano.

Struttura e contenuti:
Essi, in data ed ora concordate, contemporaneamente, misurano la lunghezza dell'ombra di uno gnomone e scambiano i risultati via Internet. Dalla misura della lunghezza dell'ombra di uno gnomone di altezza nota si ricava l'altezza massima del Sole sull'orizzonte.

Così si può ricavare l'angolo formato dai raggi solari con il raggio terrestre locale (la direzione del filo a piombo) alla data della misura; quindi conoscendo l'angolo di incidenza dei raggi solari a due diverse latitudini è possibile ricavare l'angolo al centro della Terra sotto il quale si vedono le due città. Nota la distanza tra le città con una semplice proporzione si risale al valore della circonferenza della Terra e quindi al suo raggio. Se le due città non si trovano sullo stesso meridiano, si può comunque eseguire la misura facendo alcune correzioni.

Durata: 6 ore, a parte i contatti preliminari con l'altro gruppo – classe.

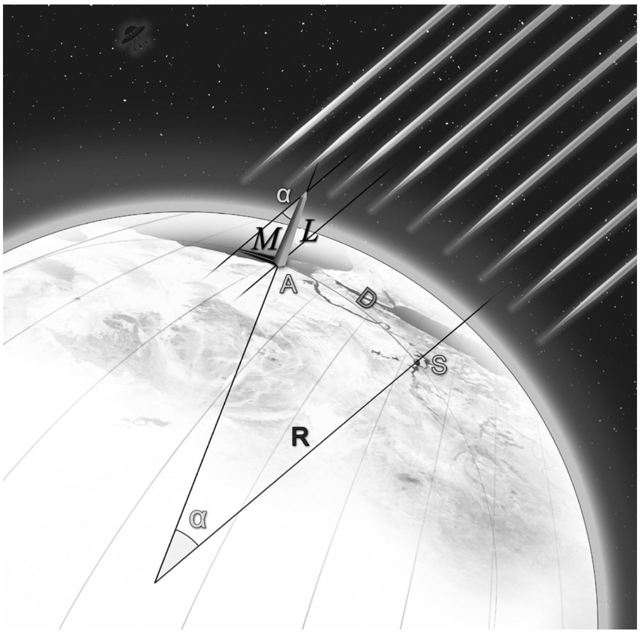
Materiali necessari:
- un bastone (gnomone; eventualmente, un supporto e del nastro adesivo);
- filo a piombo, metro, spago e gessetti;
- cartina d'Italia (o cartina d'Europa) e righello;
- accesso alla rete telematica Internet, utilizzo della posta elettronica o di una chat.

Suggerimenti:
- Come gnomone si può utilizzare qualunque palo "di recupero" (tubi, stecche di legno, sostegni dei cartelli stradali etc): è importante che sia il più diritto possibile. La misura ideale dell'altezza dello gnomone è compresa tra due e tre metri: uno gnomone più lungo oscilla (comportando un'ulteriore fonte di errore), uno più corto comporta una imprecisione inaccettabile nella misura dell'ombra.

Lo gnomone dovrà essere posizionato in modo che a Nord di esso (la zona in cui si proietta l'ombra intorno a mezzogiorno) ci sia spazio libero e soprattutto pianeggiante (il più possibile) per consentire di misurare agevolmente e con la maggiore accuratezza possibile la lunghezza dell'ombra!

- Le due scuole coinvolte devono essere collocate in città che si trovano all'incirca sullo stesso meridiano e distanti almeno 200 km. La distanza tra le due città può essere ricavata da tabelle in letteratura o misurata sulla cartina con il righello. Utilizzando un programma di chat, la comunicazione può avvenire "in diretta" ed essere più coinvolgente. La rete telematica può essere utilizzata diverse volte durante l'attività, per conoscere l'altro gruppo, per concordare le operazioni, per prendere le informazioni relative alla differenza di latitudine, per elaborare ed interpretare i dati sperimentali, ecc..
- Normalmente è difficile effettuare le misure in città che si trovino esattamente sullo stesso meridiano. Un primo effetto è che le misure non saranno simultanee, ma distanziate di un Δt uguale al tempo impiegato dalla Terra a ruotare di un angolo pari alla differenza di longitudine delle due città (la misura si riferisce al momento del passaggio del Sole al meridiano locale, cioè al mezzogiorno vero locale, che non avviene nello stesso istante se le due città non hanno la stessa longitudine). Inoltre, bisogna tener conto di un secondo effetto nell'analisi dei dati: invece della distanza topografica (quella del righello) tra le due città, i deve utilizzare la distanza tra la prima città ed una località che abbia la longitudine della prima città e la latitudine della seconda città.

La fisica richiesta:
Eratostene da Cirene *(Cirene, 276 a.C. – Alessandria d'Egitto, 194 a.C.),* matematico, geografo ed astronomo era direttore della grande biblioteca di Alessandria d'Egitto quando formulò il metodo per calcolare le dimensioni della Terra (240 a.C. - 230 a.C). Era a conoscenza del fatto che a Syene (l'attuale Assuan), a mezzogiorno del solstizio d'estate il Sole si trovava proprio sullo zenit, tanto che il fondo di un pozzo profondo ne veniva illuminato; perciò, un bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante non avrebbe proiettato alcuna ombra sul terreno. Invece, ad Alessandria questo non succedeva mai, gli obelischi proiettavano comunque la loro ombra sul terreno.



Ciò era già una dimostrazione diretta della rotondità della Terra (come ampiamente dimostrato da Aristotele). L'idea che la Terra dovesse avere una forma sferica era comunque già accettata e diffusa. Questa convinzione scaturiva dall'osservazione delle eclissi di Luna durante le quali la forma dell'ombra terrestre appariva sempre come un arco di circonferenza.

Eratostene perciò, per procedere con i suoi calcoli, ipotizzò la Terra perfettamente sferica ed il Sole sufficientemente distante da considerare paralleli i fasci di luce (matematicamente sono detti raggi) che la investono. Inoltre, assunse che Alessandria e Syene si trovassero sullo stesso meridiano.

Durante il solstizio d'estate, calcolò l'angolo di elevazione del Sole ad Alessandria, misurando l'ombra proiettata da un bastone piantato in terra: ricavò il valore di circa 1/50 di circonferenza (cioè 7° 12').

La distanza tra le due città, basata sui trasferimenti delle carovane, era stimata in 5.000 stadia (circa 800 km, tuttavia il valore preciso dello stadium, usato a quell'epoca ad Alessandria, non è attualmente conosciuto). Perciò, la circonferenza della Terra doveva essere di 50 × 5.000 = 250.000 stadia (circa 40.000 km, valore straordinariamente vicino a quello ottenuto con metodi moderni: 40.075 km). Ottenuta una stima della circonferenza della Terra, il raggio terrestre si ricavava dalla nota relazione che lega la circonferenza ed il suo raggio.

La figura mostra il procedimento seguito da Eratostene per calcolare la dimensione del raggio della Terra. In termini matematici, con riferimento ai simboli della figura, abbiamo:

$$\tan\alpha = \frac{M}{L} \;\Rightarrow\; \alpha = \arctan\frac{M}{L}$$

dove *L* è la lunghezza del palo, *M* la lunghezza dell'ombra proiettata dal palo sul terreno ed α l'angolo di elevazione del Sole.

Se *D* è la distanza tra Alessandria (punto A) e Syene (punto S) ed R è il raggio terrestre, si ricava facilmente il raggio:

$$D : 2\pi R = \alpha : 360^0 .$$

Eratostene ricavò i seguenti valori:

diametro terrestre = 12629 km circa; raggio terrestre = 6314,5 km circa

incredibilmente prossimi alle stime medie condotte con mezzi attuali.

Il metodo elaborato da Eratostene si basa su alcune assunzioni, che consentono di semplificare la procedura di calcolo a prezzo di una perdita di precisione:

- la Terra è perfettamente sferica;
- il Sole è tanto distante da considerare paralleli i raggi su Alessandria e su Syene;
- le due città si trovano sullo stesso meridiano (in realtà esse differiscono in longitudine di 3°);
- Syene è situata esattamente sul Tropico del Cancro (mentre in effetti è a 55 km a Nord di esso);
- la differenza angolare misurata ad Alessandria è di 7° 12' (essa è in realtà di 7° 5').

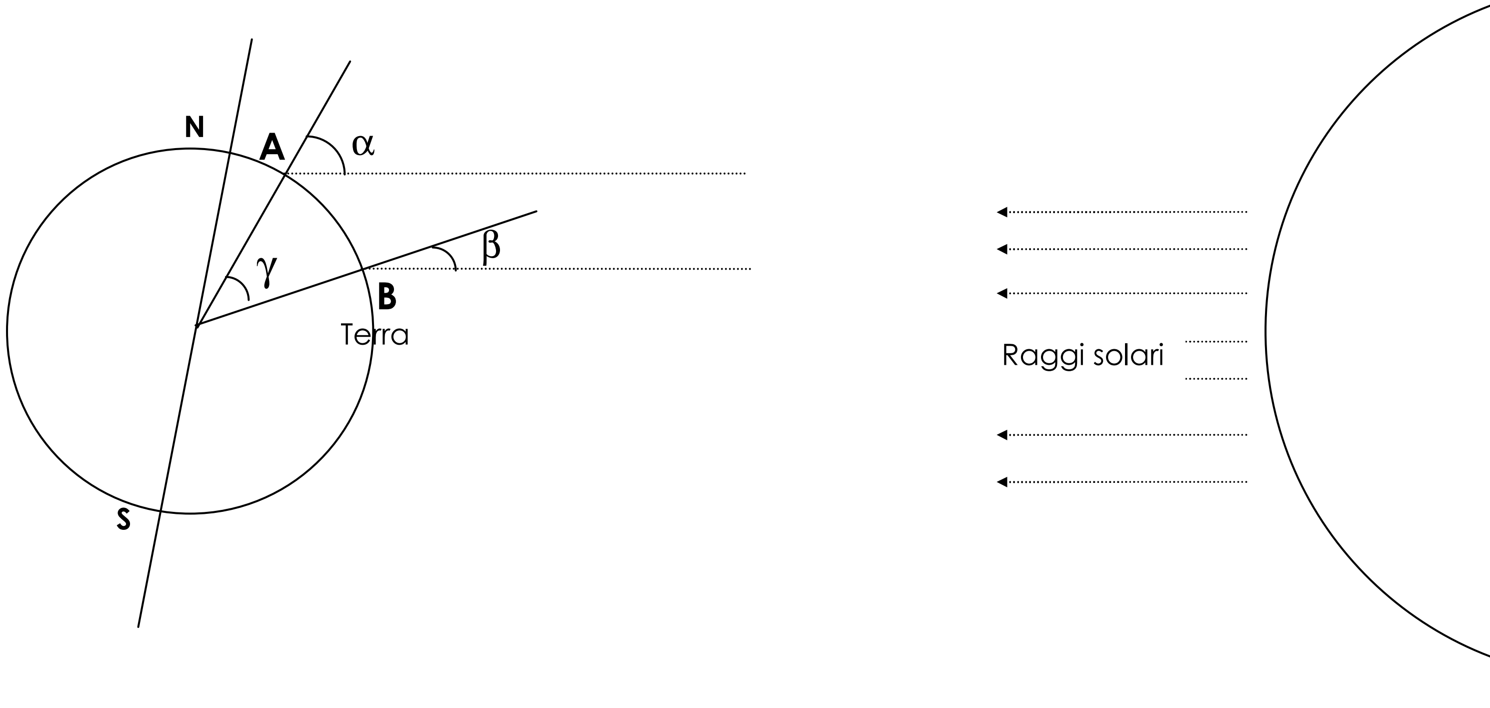
Questionario Operativo

A) Introduzione

1. Durante l'arco della giornata cosa accade all'ombra di un paletto? Perché?
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………

2. Secondo te gli antichi Greci pensavano che la Terra fosse piatta ? Su cosa si basava la loro convinzione?
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………..

3. Considera la figura: come possiamo calcolare l'angolo γ conoscendo gli angoli α e β ? E se ci troviamo nel luogo B come possiamo misurare l'angolo γ?
   ……………………………………………………………………………………………..…
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………



4. Conoscendo γ e la distanza AB tra le due città: come possiamo determinare il raggio terrestre? ……………………………………………………………………………………………………….. …… ……………………………………………………………………………………………………….. …… ……………………………………………………………………………………………………….

B) La misura ***(per i docenti è prevista la simulazione di osservazioni tra Caserta ed Enna)***

5. Ora misuriamo l'altezza dello gnomone (L) e le lunghezze della sua ombra (M) a orari precisi intorno al mezzogiorno; segna il risultato delle misure nella tabella

$\boldsymbol{L}$ = ……………………. (metri)

ore	$\boldsymbol{M}$ **lunghezza dell'ombra** (metri)

6. Il minimo dell'ombra, che corrisponde al momento in cui il Sole raggiunge la massima altezza sull'orizzonte (si chiama mezzogiorno vero locale): si osserva proprio quando l'orologio segna le ore 12? Perché? …… …… …… ……………………………………………………………………………………………………….

7. Puoi calcolare il valore dell'angolo di incidenza dei raggi solari sulla superficie terrestre ($\beta(t^*)$) nell'istante t* del mezzogiorno vero locale, alla nostra latitudine (41° circa). Riporta in tabella il valore che hai ottenuto con il tuo gruppo e quelli degli altri gruppi; calcola il valor medio.

$\beta(t^*) = \text{arctg}\,(\boldsymbol{L}\,/\boldsymbol{M}\,)$ = ……………°

	β (misurato alle ore ………..)
Gruppo 1	
Gruppo 2	
Gruppo 3	
Gruppo 4	

β_{medio} =……………° (Usare **55,4°** Caserta 7/09/2011)

[questo è il valore da comunicare all'altra classe.]

8. Ci mettiamo in contatto con il "gruppo lontano", che, con un procedimento analogo al nostro, avrà ricavato l'angolo α = ...° (**Usare 58,9° Enna 7/09/2011**)

   Dai valori di α e β possiamo ricavare γ e quindi, nota la distanza D (in km) tra le due città, possiamo stimare il raggio terrestre (R_{Terra}). (**D Caserta-Enna =389,0 km**)

   $\gamma = \alpha - \beta =$ ……………. ; $D : 2\pi R_{Terra} = \gamma : 360°$

   $\Rightarrow$ $R_{Terra} =$ ……………. km

9. Confronta il valore ottenuto con quello che si trova sui testi ($R_{letteratura}$= 6378 km, all'equatore):

   errore assoluto = ……………………… km

   errore relativo = ……………………… ; errore percentuale = …………………..% .

Queste differenze a cosa possono essere dovute? ……………………………………………………
..………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………..
…………………………………………………………………………………